$\frac{3\,5}{12}$

/ /

الاستمرار بانتظام:

تعريف: ليكن (E, d_E) و (F, d_F) فضائيين متريين و f تطبيقاً معرفاً على المجموعة الجزئية D من E وبأخذ قيمه في F، نقول أن f مستمر بانتظام على D إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان x و y أي عنصرين من D يحققان $d(x, y) < \delta$ فإن $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

ملاحظة:

1- واضح أن كل تطبيق مستمر بانتظام هو تطبيق مستمر ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة فالدالة $f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*;\ x \longrightarrow f(x) = x^2$ مستمرة ولكن ليست مستمرة بانتظام لأنه إذا كان ε عدداً حقيقياً موجباً فإنه يوجد لكل عدد حقيقي موجب δ عددان حقيقيان موجبان $x = \frac{\varepsilon}{\delta}$ و $y = x + \frac{\delta}{2}$ بحيث يكون:

$$d(x, y) = |y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

ولكن:

$$d(f(x), f(y)) = |f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| = |y - x|(y + x)$$

$$= \frac{\delta}{2}\left(2x + \frac{\delta}{2}\right)$$

$$= \delta x + \frac{\delta^2}{4} \geq \delta x = \varepsilon$$

$f(x)$ ليست مستمرة بانتظام.

2- تركيب تطبيقين مستمرين بانتظام هو تطبيق مستمر بانتظام.

مبرهنة:

إذا كان $(V, \|\cdot\|)$ فضاءً منظماً فإن التطبيقات:

1) $N: V \longrightarrow \mathbb{R}_+;\ x \longrightarrow N(x) = \|x\|$

2) $V \times V \rightarrow V;\ (x, y) \rightarrow x + y$

3) $V \longrightarrow V;\ x \longrightarrow a.x,\ 0 \neq a \in \mathbb{R}$

4) $\mathbb{R} \longrightarrow V;\ a \longrightarrow a x_0;\ x_0 \in V$

/ /

مستمرة بانتظام.

البرهان:

١- يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب $\delta = \varepsilon$ بحيث إذا كان x و y أي عنصرين من V يحققان المسافة بينهما x, y.

$$d(x,y) = \|y - x\| < \delta$$

فإن:

~~$d(x, y)$~~

$$d(N(x), N(y)) = |N(y) - N(x)| = \big|\|y\| - \|x\|\big|$$

$$\leq \|y - x\| < \delta = \varepsilon$$

توضيح: $\big|\|y\| - \|x\|\big| \leq \|y - x\|$

⇐ تطبيق مستمر بانتظام

$$\|y - x\|^2 = \langle y - x, y - x\rangle = \langle y, y - x\rangle + \langle -x, y - x\rangle$$

$$= \langle y, y\rangle - \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle$$

$$= \langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle$$

ولكن $\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$

$$-2\langle x, y\rangle \geq -2|\langle x, y\rangle|$$

$$\|y - x\|^2 \geq \langle y, y\rangle - 2|\langle x, y\rangle| + \langle x, x\rangle$$

وحسب متباينة شوارتز:

$$\|y - x\|^2 \geq \langle y, y\rangle - 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} + \langle x, x\rangle$$

$$\|y - x\|^2 \geq \|y\|^2 - 2\|x\|.\|y\| + \|x\|^2 \Rightarrow \|y - x\|^2 \geq (\|y\| - \|x\|)^2$$

$$\Rightarrow \|y - x\| \geq \big|\|y\| - \|x\|\big|$$

٢- يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب $\delta = \varepsilon$ بحيث إذا كان (x, y)، (x', y') عنصران اختياريان من $V \times V$ بحيث أن:

$$d''((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$$

/ /

$= \|x-x'\| + \|y-y'\| < \varepsilon$

$d(x+y, x'+y') = \|(x+y)-(x'+y')\| = \|(x-x')+(y-y')\| \leq$ (صور العناصر)

$\|(x-x')\| + \|y-y'\| < \delta = \varepsilon$

ومنه فإن التطبيق مستمر بانتظام.

٣- يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{|a_0|}$ بحيث إذا كانا x, y عنصران اختياريان من V بحيث:

~~$d(x,y) < \delta$~~

$d(x,y) = \|x-y\| < \delta$ فإن

$d(a_0 x, a_0 y) = \|a_0 x - a_0 y\| = \|a_0(x-y)\|$
$= |a_0| \cdot \|x-y\| < |a_0| \cdot \delta = \varepsilon$

ومنه فإن التطبيق مستمر بانتظام.

٤- يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{\|x_0\|}$ بحيث أنه من أجل أي عنصرين a و b من R بحيث أن

$d(a,b) = |a-b| < \delta$.

فإن

$d(ax_0, bx_0) = \|ax_0 - bx_0\| = \|(a-b) \cdot x_0\| = |a-b| \cdot \|x_0\| \leq$
$\leq \delta \cdot \|x_0\| = \varepsilon$

فإن التطبيق مستمر بانتظام.

فضاءات الدوال المحدودة والمحدودة المستمرة :

. لقد رمزنا سابقاً لمجموعة كل الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على مجموعة غير خالية X بالرمز $B(X,R)$ ووجدنا أنه إذا زودنا هذه المجموعة بعمليتي جمع دالتين وضرب دالة بعدد حقيقي فإنها تصبح فضاءً متجهياً حقيقياً ورأينا في مثال سابق أن التطبيق المنطلق

$$B(X,R) \longrightarrow R_+ ; f \longrightarrow \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

يعرف على الفضاء $B(X,R)$ نظيم التقارب المنتظم.

. وإذا كانت d المسافة على $B(X,R)$ المولدة بهذا النظيم أي

$$d(f,g) = \|f-g\| = \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|$$

فإن: $B(X,R)$ يصبح فضاءً مترياً عندئذٍ يمكننا أن نتكلم عن تقارب متتالية دوال من $B(X,R)$ سنبين الآن أن $B(X,R)$ هو فضاء تام.

مبرهنة :
فضاء الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على مجموعة غير خالية X ، الفضاء $B(X,R)$ فضاء تام.

البرهان :
إذا كانت f_n متتالية كوشي في الفضاء $B(X,R)$ فيقابل (استناداً لتعريف) كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث إذا كان $p \ge N_\varepsilon$ ، $n \ge N_\varepsilon$ فإن المسافة بينها :

$$d(f_p, f_n) = \sup_{x\in X} |f_p(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن $|f_p(x)-f_n(x)| < \varepsilon$ وذلك $\forall x\in X$
وهذا يعني أن متتالية الأعداد الحقيقية $f_n(x)$ هي متتالية كوشي وبالتالي حسب نتيجة سابقة فهي متتالية متقاربة ، لنعرف الدالة f :

$$f: X \longrightarrow R ; x \longrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

لأن متتالية الأعداد الحقيقية هي متتالية كوشي

ولنأخذ عدداً طبيعياً m ويحقق $m \geq N_\varepsilon$ بحيث أن

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \; ; \; m \geq N_\varepsilon$$

$$\lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \; ; \; \forall x \in X$$

ومنه

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

ومنه ينتج أنه $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ وبالتالي فإن المتتالية f_n متقاربة من النقطة f.

ومنه ينتج أن الفضاء $B(X,R)$ هو فضاء تام.

نتيجة:

فضاء الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على مجموعة غير خالية X هو فضاء باناخ. (لأنه فضاء منظم تام)

إذا فرضنا أن X فضاء متري فيمكن أن نتكلم عن استمرار الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة والمستمرة على X، لنرمز بـ (X,R) لتلك المجموعة الجزئية من $B(X,R)$

أي أن $C(X,R)$ هي مجموعة الدوال الحقيقية المحدودة والمستمرة والمعرفة على الفضاء المتري X وإذا كانت f و g دالتين حقيقيتين ومستمرتين على X و a عدد حقيقي ما فإنه يبرهن أن الدالتين $f+g$ و af مستمرتان أيضاً على X ومنه نستنتج

نتيجة:

مجموعة الدوال الحقيقية المحدودة والمستمرة المعرفة على فضاء متري X أي المجموعة $C(X,R)$ هي فضاء متجه حقيقي

مبرهنة:

$C(X,R)$ مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المتري $B(X,R)$

البرهان:

إذا كانت f دالة من $B(X,R)$ منتمية إلى المجموعة $C(X,R)$ فيمكن أن نثبت أن f تنتمي إلى $C(X,R)$، وبالتالي يكفي أن تكون f مستمرة في نقطة اختيارية x_0 من X.

بما أن f ملاصقة للمجموعة $C(X,R)$ فيوجد من أجل أي عدد حقيقي موجب ε دالة f_0 من $C(X,R)$ بحيث يكون

$$d(f,f_0) = \| f - f_0 \| = \sup_{x \in X} |f(x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ومنه $|f(x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ وذلك $\forall x \in X_0$ وبما أن f_0 مستمرة X فهي مستمرة في x_0 وبالتالي يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث أياً كانت $x \in X$ و $d(x, x_0) < \delta$ فإن المسافة $\frac{\varepsilon}{3} > |f_0(x) - f_0(x_0)|$ وعندئذ فإن $\forall x \in X$ الذي يحقق المسافة $d(x,x_0) < \delta$ فإن المسافة

$$|f(x) - f_0(x)| = |f(x) - f_0(x) + f_0(x) - f_0(x_0) + f_0(x_0) - f_0(x)| \le$$

$$|f(x) - f_0(x)| + |f_0(x) - f_0(x_0)| + |f_0(x_0) - f_0(x)| <$$

$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ومنه ينتج أن f مستمرة وبالتالي $f \in C(X,R)$.

التطبيقات الخطية والتطبيقات الخطية المستمرة:

تعريف: ليكن E و F فضائيين حقيقيين نقول عن تطبيق T للفضاء E في الفضاء F أنه خطي إذا حقق الشرطين:

1. $T(x,y) = T(x) + T(y)$
2. $T(ax) = a\,T(x)$

وذلك أياً كان x و y من E، و a من R.

ويمكن التحقق من الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق T خطيا هو أن يتحقق المساواة.

$$T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$$

x و y من E ، و a,b من R

نتيجة:

يمكن التحقق من أن مجموعة التطبيقات الخطية للفضاء المتجه الحقيقي E في الفضاء المتجه الحقيقي F مزودة بعملية جمع تطبيقين خطيين:

$$(T_1+T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

وجداء تطبيق خطي بعدد

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$$

هي فضاء متجه حقيقي.

لنفرض الآن أن كلا من E و F ذو بعد منته وأن $\dim E = n$ ، $\dim F = m$

ولتكن $\{e_1, \ldots, e_n\}$ قاعدة للفضاء E ، و $\{g_1, \ldots, g_m\}$ قاعدة للفضاء F.

وإذا كان $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ عنصرا ما من E ، $y = \sum_{j=1}^{m} y_j g_j$ عنصرا من F يحقق $T(x) = y$ وكان

$$T(e_1) = a_{11} g_1 + a_{21} g_2 + \cdots + a_{m1} g_m$$

$$T(e_2) = a_{12} g_1 + a_{22} g_2 + \cdots + a_{m2} g_m$$

$$T(e_n) = a_{1n} g_1 + a_{2n} g_2 + \cdots + a_{mn} g_m$$

فعندئذ،

$$\sum_{j=1}^{m} y_j g_j = y = T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} g_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji} x_i g_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) g_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j g_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) g_j \Rightarrow y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \ , \quad j = 1, \ldots, m$$

/ /

ونكتب المعادلات السابقة مصفوفياً بالشكل :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ | \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{———} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \text{———} & a_{2n} \\ | & | & & | \\ a_{m1} & a_{m2} & \text{———} & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ | \\ x_n \end{bmatrix}$$

وإذا رمزنا بـ X للمصفوفة العمودية المشكلة من مركبات المتجه x بالنسبة للقاعدة $\{e_1, \text{———} e_n\}$ وبـ Y للمصفوفة العمودية المشكلة من مركبات المتجه $y=T(x)$ بالنسبة للقاعدة $\{g_1, \text{———} g_m\}$ ~~[illegible]~~ فإن العلاقة المصفوفية الأخيرة تكتب بالشكل : $Y=AX$ حيث A المصفوفة من النوع $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{———} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$